

CORSO DI FORMAZIONE MATHUP 2015/16

Corsiste: Meynet Elisabetta

Corso docenti I classe scuola secondaria di I grado

Cipriano Laura

Gruppo di lavoro 24 – Tutor: Tamara Rinaldi

Lago Clara

PROPOSTA DI LABORATORIO

LA MACCHINA PER DIVIDERE

CLASSI COINVOLTE: classi 1^e scuola secondaria di I grado.

AREA TEMATICA DI RIFERIMENTO: la divisione in N

PREREQUISITI

Il laboratorio non necessita di prerequisiti particolari, si presta ad essere svolto fin dall'inizio della classe 1^a della scuola secondaria di I grado; per affrontare le attività proposte è sufficiente, infatti, che gli alunni conoscano le quattro operazioni con i numeri naturali e che abbiano già osservato cosa succede nei casi particolari della divisione in cui lo 0 si trova al divisore.

OBIETTIVI

Il laboratorio ha l'obiettivo principale di consolidare il concetto di divisione in N, ponendo particolare attenzione al resto e al suo significato; si vuole inoltre portare gli alunni a comprendere ed utilizzare la scrittura della divisione come $D = d * q + r$.

COLLEGAMENTI CON ALTRI ARGOMENTI DI MATEMATICA

Se si considerano le divisioni con resto 0, il proseguimento naturale delle attività proposte si trova nella trattazione di multipli e divisori e, di conseguenza, mcm e MCD; l'utilizzo della scrittura $D = d * q + r$ facilita l'introduzione dell'algoritmo euclideo per il calcolo del MCD.

Le attività proposte permettono, inoltre, di addentrarsi nell'ambito dell'aritmetica modulare, in quanto portano facilmente ad osservare e introdurre il concetto di classe di resto e le sue applicazioni.

COLLEGAMENTI CON LE SCIENZE: non previsti

COLLEGAMENTI CON ALTRE DISCIPLINE: non previsti

NUMERO DI SESSIONI E DURATA

1 sessione: la ruota dei desideri

1 modulo (50 minuti)

II sessione: la macchina della divisione	2 moduli (100 minuti)
III sessione: il gioco delle carte	1 modulo (50 minuti)
IV sessione: la ruota dei desideri – seconda parte	1 modulo (50 minuti)

I tempi indicati sono quelli previsti per lo svolgimento delle varie attività; vanno aggiunti i momenti di verifica iniziale e finale e le riflessioni sul percorso di lavoro.

All'inizio di ogni attività è opportuno comunicare agli alunni quanto tempo si ritiene necessario per svolgerla, in modo che essi imparino a gestire questo aspetto. È comunque opportuno prevedere una certa elasticità e concedere del tempo supplementare, nel caso in cui gli alunni ne abbiano bisogno per discutere ed elaborare le loro risposte.

TIPOLOGIA DEI GRUPPI

Gli alunni saranno suddivisi in gruppi da 3-4 componenti, compatibilmente con il numero degli alunni della classe. Si preferiranno gruppi da 4, per evitare che nel gruppo da 3, se due persone vanno molto d'accordo, il terzo rimanga tagliato fuori dalla discussione.

I componenti dei gruppi saranno scelti dall'insegnante secondo criteri di eterogeneità dal punto di vista degli apprendimenti e del sesso. Si cercherà di avere per ogni gruppo:

- studenti con rendimento alto, medio e basso
- almeno 2 maschi e 2 femmine; i gruppi da 3 alunni saranno composti preferibilmente da alunni dello stesso sesso, sempre per evitare che uno dei tre rimanga escluso/a dal gruppo;

Nella scelta dei componenti, l'insegnante terrà conto anche delle competenze relazionali degli allievi e delle affinità caratteriali: si cercherà di evitare che nello stesso gruppo si trovino studenti che vanno molto d'accordo e studenti che non vanno per niente d'accordo.

I gruppi eterogenei creano una maggior ricchezza di stimoli per tutti i componenti e favoriscono dinamiche che portano alla crescita collettiva. Rimane il rischio che gli alunni più deboli si appoggino troppo ai compagni più forti: si cercherà di minimizzare questo, evitando che i più deboli si trovino in gruppo con degli alunni forti e individualisti.

MATERIALE NECESSARIO

I sessione: scheda 1 (allegato 1), una ruota di carta colorata a 6 spicchi assicurata con un fermacampioni su cartoncino (vedi immagine e allegato 5) per ogni gruppo



II sessione: scheda 2 (allegato 2)

III sessione: scheda 3 parte I e II (allegati 3a e 3b), un mazzo di carte per ogni gruppo, calcolatrice

IV sessione: scheda 4 (allegato 4), ruote di carta colorata a 6 e a 10 spicchi (vedi allegato 6) per ogni gruppo, calcolatrice

I mazzi di carte possono essere sostituiti da mazzi di figurine o altro; il numero di carte del mazzo è diverso per ogni gruppo e deve essere preventivamente stabilito dall'insegnante; noi abbiamo utilizzato, e questi numeri andavano bene, per il mazzo 1: 30 carte; mazzo 2: 25 carte, mazzo 3: 36 carte, mazzo 4: 37 carte, mazzo 5: 12 carte, mazzo 6: 21 carte.

DESCRIZIONE ATTIVITÀ

I sessione: la ruota dei desideri

L'obiettivo di questa sessione è di creare un bisogno di apprendimento. Una ruota in cartoncino è divisa in sei settori, a ciascuno dei quali è associato un premio. Scelto un numero, la ruota viene fatta girare, partendo sempre dalla stessa posizione, percorrendo tanti settori quanti indicati dal numero. Gli alunni riflettono su quali e quanti numeri permettono loro di ottenere il premio desiderato. Si parte da numeri piccoli, per arrivare a chiedersi come può funzionare con numeri molto grandi: lo scopo è di creare la necessità di uno strumento, la divisione con quoziente e resto, che permetta di superare l'ostacolo.

II sessione: la macchina della divisione

Si presenta ai ragazzi la "macchina della divisione" e si propongono quesiti per portarli a familiarizzare con essa. I ragazzi conoscono già la divisione, ma probabilmente la conoscono poco come "macchina" che, dati due numeri naturali di partenza, il dividendo e il divisore, restituisce due numeri naturali, il quoziente e il resto.

Al termine della sessione, riflessione collettiva su quanto appreso e/o consolidato durante l'attività.

III sessione: il gioco delle carte

Si propone ai ragazzi un'attività con le carte. Ogni gruppo ha a disposizione un mazzetto di carte. I ragazzi non conoscono il numero di carte del mazzetto; giocando a distribuire le carte tra un numero variabile di giocatori in modo equo e contando le carte che avanzano, devono risalire al numero di carte nel mazzo. L'obiettivo è capire il funzionamento della divisione euclidea e la sua corretta scrittura, mettendo in evidenza che il resto deve essere strettamente minore del divisore.

IV sessione: la ruota dei desideri – seconda parte

Si ripropongono i quesiti rimasti aperti nella sessione I, per la cui soluzione si hanno ora gli strumenti.

Si stimolano anche i ragazzi a riflettere sull'andamento regolare dei resti, cioè, se il divisore è n , aumentando sempre di 1 il dividendo, il resto aumenta di 1 fino ad arrivare a $n-1$ e poi torna a zero, e poi aumenta sempre di 1 e così via.

A classe intera si riflette sul percorso svolto.

SCHEDE DI LABORATORIO

Scheda 1: la ruota dei desideri. Vedere allegato 1.

Scheda 2: la macchina della divisione. Vedere allegato 2.

Scheda 3: il gioco delle carte (parte I). Vedere allegato 3a.

Scheda 3: il gioco delle carte (parte II). Vedere allegato 3b.

Scheda 4: la ruota dei desideri (parte II). Vedere allegato 4.

DIFFICOLTÀ

Diamo qui una panoramica delle difficoltà previste e incontrate. In allegato è presente una griglia che riporta in dettaglio le principali difficoltà previste e come risolverle. È da notare, però, che alcune difficoltà sono state inserite *ad hoc* nell'attività sia per portare gli alunni a sentire il bisogno di uno strumento per risolverle sia per far emergere gli errori su cui discutere per progredire.

I sessione:

- l'insegnante deve assicurarsi che tutti i gruppi abbiano capito come girare la ruota e contare gli spicchi, per evitare discordanza nei risultati dovuta a diverse interpretazioni del testo.
- gli alunni potrebbero trovare i numeri che permettono di vincere un certo premio pensando alla successione $6 - 12 - 18...$ e, magari, commettere l'errore di pensare alla successione $7 - 14 - 21...$ per il premio successivo, per poi accorgersi con una verifica, spontanea o stimolata dall'insegnante, che non funziona.
- gli alunni potrebbero trovare difficoltà nel lavorare con numeri grandi, che non permettono di rispondere alla domanda usando la strategia della successione. Dopo la sperimentazione abbiamo pensato di mettere un numero non solo grande, ma difficilmente individuabile come multiplo di 6.

Queste due difficoltà sono attese e auspicate, proprio per introdurre il resto in una fase successiva e risolvere quindi la situazione.

II, III e IV sessione:

- gli alunni potrebbero incontrare delle difficoltà a capire come funziona la macchina.
- la divisione in N non è un'operazione in senso classico: a due numeri ne associa altri due, ciascuno con il proprio ruolo e significato. Questo porta alla necessità di introdurre la scrittura $D = d * q + r$, che può risultare ostica ai ragazzi poiché si scrive una divisione senza il simbolo della divisione.

l'utilizzo della calcolatrice: gli alunni usano spesso la calcolatrice anche al di fuori della scuola, immergendosi, così, nel mondo dei razionali. Questo può generare confusione, poiché i ragazzi a volte interpretano la parte decimale come resto o non sanno gestire il risultato della calcolatrice per risalire al resto.

- coppie ordinate che danno lo stesso risultato in N , non danno lo stesso risultato in Q ; per esempio, $13 : 4$ e $10 : 3$ in N danno gli stessi risultati, cioè 3 con il resto di 1, ma le frazioni $13/4$ e $10/3$ non sono frazioni equivalenti; non ci aspettiamo che emerga questa difficoltà, ma l'insegnante deve esserne consapevole per poter gestire al meglio eventuali domande
- il resto deve essere strettamente minore del divisore: per sottolinearlo è stata introdotta la domanda sulla macchina "inceppata" nella scheda 3

nonostante la moltiplicazione goda della proprietà commutativa, se il resto è minore del divisore, nella scrittura $D = d * q + r$ d e q si possono scambiare, altrimenti no: l'uguaglianza rimane comunque valida, ma non è più la scrittura della divisione. Nella nostre sperimentazioni questo problema è emerso ed ha richiesto un momento di riflessione. Si tratta di un punto molto delicato.

- il problema dello 0: sono stati inseriti quesiti sui casi di divisione impossibile e indeterminata nella scheda 2, per consolidare il fatto che le divisioni $n:0$ e $0:0$ non hanno senso. L'insegnante deve essere consapevole anche del fatto che la scrittura $D = d * q + r$ rappresenta la divisione in N solo se " d " è diverso da zero. Si tratta di una questione delicata che non si risolve certo solo con il nostro laboratorio, il problema dovrà comunque essere ripreso in altre attività.
- Difficoltà di verbalizzazione, che non ci aspettavamo e che sono emerse durante la sperimentazione. Anche in questo caso si tratta di un problema che non si risolve con un laboratorio ma lavorandoci, in diverse attività, per molto tempo.
- Risulta difficile il passaggio fra la macchina della divisione e la ruota dei desideri: si dovrebbero proporre, oltre alle attività del laboratorio, anche varie situazioni problema che prevedano l'uso del quoziente e/o del resto (calendario, collane, medicine, orologi, conte...)

- Anche il passaggio chiave dal gioco delle carte alla scrittura della divisione è risultato molto difficile : per questo abbiamo inserito nelle schede ulteriori collegamenti tra il gioco delle carte come distribuzione , cioè divisione, di carte tra i giocatori e la macchina della divisione , ponendo attenzione all'ordine e al significato dei numeri in entrata e in uscita.

MODALITÀ DI VALUTAZIONE

Al termine del laboratorio, gli alunni dovrebbero aver consolidato il concetto di divisione in N come operazione che, dati due numeri naturali di partenza, restituisce due numeri naturali: quoziente e resto, dovrebbero aver interiorizzato il concetto di resto e dovrebbero comprendere ed utilizzare la scrittura della divisione come $D = d * q + r$.

Per verificarlo è stata somministrata una verifica individuale prima (allegato 7) e dopo (allegato 8) il laboratorio. Dal raffronto delle due verifiche, analoghe ma non identiche, abbiamo avuto un'indicazione di quanto sono stati raggiunti i risultati attesi. Nella verifica somministrata prima del laboratorio, non è stata concessa la calcolatrice. La prova ha avuto durata di 60'.

- molti alunni hanno risposto correttamente alle domande 1 e 2, (e 1bis e 2 bis) in cui basta solo osservare e continuare la sequenza
- pochi alunni sono riusciti a rispondere alla domanda 3 bis , perché con un numero grande per rispondere è necessario padroneggiare il concetto di resto; diversi alunni sono riusciti a rispondere alla domanda 3 poiché si lavorava in modulo 10 e quindi il resto coincideva con la cifra finale del numero.
- alcuni alunni sono riusciti a rispondere alla domanda 5 e 5bis
- pochissimi alunni hanno risposto alle domande 4 bis e 6 (bis), per via dei numeri grandi e per il fatto che si debba padroneggiare sia il quoziente sia il resto.

Abbiamo valutato soddisfacente l'efficacia del laboratorio perché il numero di alunni che ha risposto correttamente alle domande della verifica finale (allegato 9) è aumentato in maniera sensibile.

Per valutare l'impianto del laboratorio proposto, l'insegnante ha compilato durante ogni sessione una griglia di osservazione (allegato 10) in cui per ogni gruppo ha annotato le difficoltà incontrate, il rispetto dei tempi, l'andamento del lavoro di gruppo e le discussioni emerse.

Per integrare le osservazioni dell'insegnante e per stimolare negli alunni una riflessione sul percorso, all'inizio dell'attività è stata consegnata ai ragazzi una scheda di autovalutazione degli apprendimenti e del lavoro di gruppo (allegato 11). Ogni alunno l'ha completata in itinere. Al termine del laboratorio, la scheda è stata condivisa all'interno del gruppo.

Al termine della sperimentazione, le insegnanti si sono incontrate per confrontare le griglie di osservazione, le schede di riflessione degli alunni e le verifiche individuali.

BIBLIOGRAFIA E SITOGRAFIA

<http://quadernoquadretti.it/giochi/2010/documenti/medie/tappa2-I-media.pdf> per la ruota dei desideri

<http://quadernoquadretti.it/giochi/2008/documenti/medie/testi/tappa3-I-media.pdf> per il problema sui fregi inserito nella verifica iniziale

<http://quadernoquadretti.it/giochi/2006/documenti/medie/testi/tappa4-I-II-III-media-racconto.pdf> per il problema sulle incisioni animalesche inserito nella verifica finale

Michel Chastellain, François Jaquet "Mathématiques cinquième année" Livre de l'élève, Office romand des éditions et du matériel scolaire per l'idea della macchina.

Ringraziamo l'alunno *Ludovico Garin* per il disegno della macchina.

ALLEGATO 1

SCHEDA ALUNNO 1 - LA RUOTA DEI DESIDERI

Buongiorno ragazzi!

Visto che ci avviciniamo alla fine dell'anno scolastico, vorrei iniziare a pensare insieme a voi a qualche premio per i traguardi che avete raggiunto. Sarete voi stessi a sceglierli...ma a modo mio.

Scrivete i premi che desiderate sugli spicchi di questa ruota, un solo premio per ogni spicchio, accordandovi con i compagni di gruppo: cercate di scegliere dei premi ragionevoli, altrimenti rimarrete a mani vuote!

Per favore, lasciate uno spicchio libero, vorrei scrivere anch'io un premio che sto preparando per voi.

Bene, ora vi spiego il regolamento.

Si comincia sempre ponendo lo spicchio rosso all'altezza della freccia: questo spicchio corrisponde al numero 1. Si sceglie un numero e si gira la ruota sempre nello stesso senso, quello dell'orologio, di tanti spicchi quanti ne indica il numero scelto.

Che premio si vince se si dice il numero 10? _____

E il numero 17? _____

E il numero 30? _____

E il numero 42? _____

E il numero 35? _____

Se voleste vincere il premio scritto sullo spicchio rosso, quale numero scegliereste? _____

È l'unico che funziona o ce ne sono altri? _____ Quanti? _____

Portate qualche esempio usando numeri maggiori della somma delle vostre età: _____

Se voleste vincere il premio scritto sullo spicchio arancione, quale numero scegliereste? _____

È l'unico che funziona o ce ne sono altri? _____ Quanti? _____

Portate qualche esempio usando numeri maggiori della somma delle età delle vostre mamme: _____

Che premio si vince se si dice il numero 3181640 ?

Spiegate il vostro ragionamento.

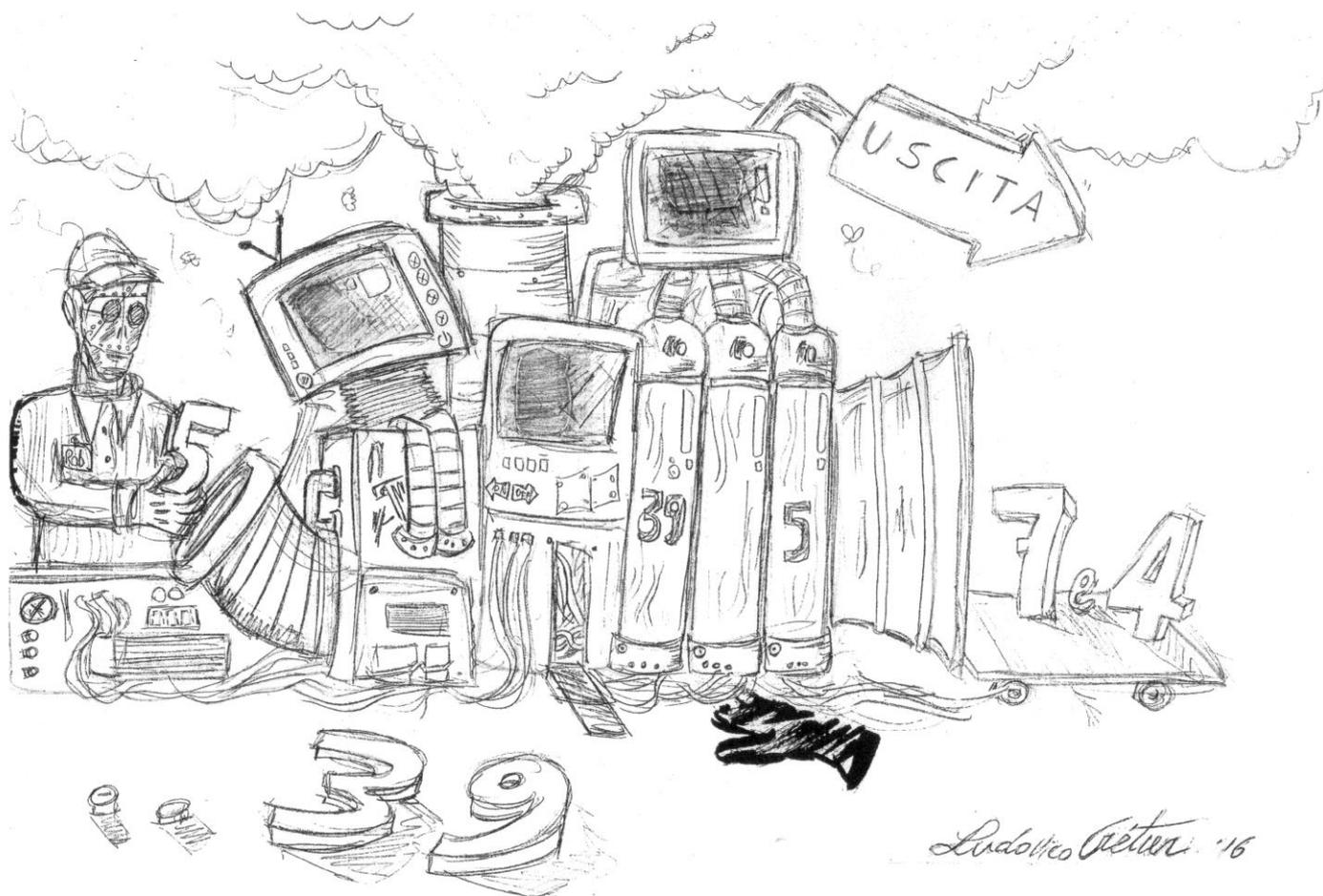
Avete capito come funziona? Immagino che abbiate intuito qualcosa e vorrei aiutarvi a comprendere fino in fondo, con l'aiuto di ... Euclide! Alla prossima volta!

ALLEGATO 2

SCHEDA ALUNNO 2 - LA MACCHINA DELLA DIVISIONE

Ciao ragazzi! Sono Euclide, ho saputo che avete bisogno del mio aiuto... bene, sono pronto!

Vi presento la macchina che ho costruito. Cosa ve ne pare?



Sì, d'accordo, l'aspetto non è eccezionale, ma dovete pensare che io sono vissuto attorno al 300 a. C.!

E poi, al di là dell'aspetto, vi aiuterà ad ottenere il premio che desiderate: con l'aiuto della mia assistente capirete come funziona.

Volete sapere chi è la mia assistente? Avete ragione, non ve l'ho ancora presentata: è la vostra prof, naturalmente! Le ho insegnato molti trucchi, quando è venuta a trovarmi, e ora aiuterà voi a scoprirli...!

Per prima cosa, vi mostro qualche esempio:

se metto dentro 39 e 5, la macchina manda fuori 7 e 4

se metto dentro 5 e 39, la macchina manda fuori 0 e 5

se metto dentro 35 e 7, la macchina manda fuori 5 e 0

se metto dentro 35 e 1, la macchina manda fuori 35 e 0

Sono sicuro che avete capito come funziona! Provate a spiegarlo qui sotto a parole:

Ora provate ad usare la macchina per rispondere ad alcune domande e verificate con la mia assistente che le vostre previsioni siano giuste: è importantissimo, prima di andare avanti, essere tutti d'accordo sul meccanismo di funzionamento!

Se metto dentro 43 e 10, che numeri manderà fuori la macchina? _____

Se metto dentro 43 e 43, che numeri manderà fuori la macchina? _____

Se metto dentro 19 e 5, che numeri manderà fuori la macchina? _____

E ora, più difficili:

Se voglio avere in uscita 2 e 0, che numeri posso mettere in entrata? _____

È l'unica coppia che funziona, oppure riuscite a trovarne altre? _____

Quali? _____ Quante? _____

Se voglio avere in uscita 2 e 1, che numeri posso mettere in entrata? _____

È l'unica coppia che funziona, oppure riuscite a trovarne altre? _____

Quali? _____ Quante? _____

Se voglio avere in uscita 0 e 0, che numeri posso mettere in entrata? _____

È l'unica coppia che funziona, oppure riuscite a trovarne altre? _____

Quali? _____ Quante? _____

ATTENZIONE!

Ci sono delle coppie di numeri che non potrete MAI inserire nella macchina, altrimenti diventerà inutilizzabile.

Quando inserite nella macchina 0 e 0, la macchina impazzisce e continua a buttare fuori numeri senza riuscire a fermarsi! Sapreste dire perché? _____

Ci sono altre coppie di numeri che danno questo effetto? Quali? _____

Quando inserite 3 e 0, la macchina si blocca e non riesce a mandar fuori nessun risultato.

Sapreste dire perché? _____

Ci sono altre coppie di numeri che non si possono inserire? Quali? _____

Ora, con l'aiuto della mia assistente, provate a ricostruire quello che avete imparato e riflettete:

che cosa fa la macchina? _____

conoscevatè già il suo funzionamento? _____

che nome possiamo dare a questa macchina? _____

ALLEGATO 3a

SCHEMA ALUNNO 3a - IL GIOCO DELLE CARTE (parte I)

Buongiorno ragazzi! Sono sempre io, Euclide, e sono felice di ritrovarvi qui.

La prima volta che ci siamo incontrati abbiamo imparato a conoscere una macchina speciale, vi ricordate?

L'abbiamo chiamata _____

In realtà ha un nome più difficile: proprio in mio onore, i matematici l'hanno chiamata DIVISIONE EUCLIDEA.

Oggi vi propongo un gioco che vi aiuterà a capire meglio come funziona e a tradurre le divisioni nella mia lingua.

Avete a disposizione un mazzo di carte e immaginate di distribuirle al numero di giocatori indicato in tabella, in modo che tutti i giocatori ricevano lo stesso numero di carte. La distribuzione si ferma quando non avete più abbastanza carte in mano per finire il giro. Completate ogni volta la tabella.

Per il momento, lasciate stare la colonna grigia, ce ne occuperemo più tardi.

	Numero di giocatori (g)	Numero di carte per giocatore (c)	Numero di carte avanzate (a)
	7		
	5		
	3		

Ora passate la tabella ai compagni del gruppo accanto a voi.

ALLEGATO 3b

SCHEDA ALUNNO 3b - IL GIOCO DELLE CARTE (parte II)

Ora dovete indovinare quante carte c'erano nel mazzo dei vostri compagni, e così riempirete anche la colonna grigia, che si intitola "numero di carte nel mazzo (m)".

Come avete fatto a trovare le risposte? Scrivete il ragionamento che avete seguito e i calcoli che avete svolto:

Quindi, se doveste esprimere il vostro ragionamento con una formula, scrivereste:

numero di carte del mazzo = _____

cioè $m =$ _____

QUELLO CHE AVETE SCRITTO È QUALCOSA DI MOLTO IMPORTANTE E VI SERVIRÀ ANCHE IN SEGUITO TANTE VOLTE. STA A VOI TROVARE IL MODO MIGLIORE PER RICORDARVENE...

E ora, cosa c'entra tutto questo con la nostra macchina? Qualcuno di voi magari l'ha già capito...

Scegliete una RIGA della tabella che avete completato e provate a introdurre nella macchina il numero di carte del mazzo (m) e il numero di giocatori (g): cosa manda fuori la macchina?

Ecco cosa c'entra la macchina! Distribuire le carte tra giocatori come avete fatto prima, cioè facendo in modo che tutti i giocatori ricevano lo stesso numero di carte e che la distribuzione si fermi quando non si hanno più carte per finire il giro, è proprio una divisione!

Il numero di carte da distribuire è il _____ nella macchina della divisione.

Il numero di giocatori è il _____ nella macchina della divisione.

Il numero di carte per ogni giocatore è _____ nella macchina della divisione.

Il numero di carte restanti è _____ nella macchina della divisione.

Vi ricordate ancora quella cosa molto importante che avete scritto e che vi ho detto di ricordare? Allora rispondete:

"metto nella macchina i numeri 34 e 7 e ottengo i numeri 4 e 6" si scrive

Questa è la scrittura della divisione euclidea: avete imparato la mia lingua!

Se fosse una distribuzione di carte,

34 sarebbe _____

7 sarebbe _____

4 sarebbe _____

6 sarebbe _____

Cambierebbe qualcosa se io mettessi nella macchina 34 e 4? Come sarebbe la scrittura?

Provate ora a completare queste scritture:

$$64 = 5 \cdot 12 + \dots$$

$$25 = 4 \cdot \dots + \dots$$

$$17 = 17 \cdot \dots + \dots$$

$$6 = 7 \cdot \dots + \dots$$

$$14 = \dots \cdot 3 + \dots$$

$$\dots = 11 \cdot \dots + 1$$

In alcuni di questi casi riuscite a dare più di una risposta? _____

Se sì, quali? _____

$$275\,598 = 15 \cdot 18\,373 + \dots$$

Controllate il quoziente con la calcolatrice, io l'ho fatto a mente...

Un'ultima domanda. Voglio proprio vedere se siete anche dei bravi meccanici: una delle mie macchine si è inceppata. Abbiamo inserito 87 e 15, ma non siamo riusciti a tirar fuori nessun numero. Smontando gli ingranaggi, abbiamo trovato un foglietto spiegazzato con scritto questo:

$$87 = 15 \cdot 4 + 27$$

Siamo sicuri che con un foglietto così ci dev'essere qualcosa che non va. Come mai? Sapreste dirmi qual è il problema?

ALLEGATO 4

SCHEDA ALUNNO 4 - LA RUOTA DEI DESIDERI (parte II)

Torniamo alla ruota con i premi: sapreste ora dire che numeri scegliereste per vincere il premio scritto sullo spicchio arancione? _____

cioè tutti i numeri che _____

E che premio si vince se si dice il numero 12662? _____

Perché? _____

Usate pure la calcolatrice, ma ricordate: non parla la mia lingua.

Come spieghereste il vostro ragionamento a un vostro amico che fa la V classe della scuola primaria?

E ora, che premio si vince

con il numero 12663? _____

perché _____

con il numero 12664? _____

perché _____

con il numero 12665? _____

perché _____

con il numero 12666? _____

perché _____

con il numero 12667? _____

perché _____

con il numero 12668? _____

perché _____

con il numero 12669? _____

perché _____

con il numero 12670? _____

perché _____

con il numero 12671? _____

perché _____

Che cosa notate dei resti di questi numeri tutti in fila nella divisione per

6? _____

con il numero 6332? _____ perché _____

con il numero 25328? _____ perché _____

con il numero 12675? _____ perché _____

con il numero 12696? _____ perché _____

con il numero 4221? _____ perché _____

con il numero 37989? _____ perché _____

Se avete osservato qualcosa di particolare, annotatelo qui sotto:

Prendete ora una nuova ruota a 10 spicchi. Ricopiate tutti i premi sugli spicchi del colore corrispondente e lasciate vuoti gli spicchi grigi... girate! Attenzione: c'è il rischio di rimanere a mani vuote...

Si parte sempre dallo spicchio rosso, che corrisponde al numero 1.

Se si dice 57 qual è il premio corrispondente? _____

A quali numeri corrisponde lo spicchio giallo? _____

Che premio si trova se si dice il numero 12662? _____

Ora scegliete il premio che desiderate: _____ e

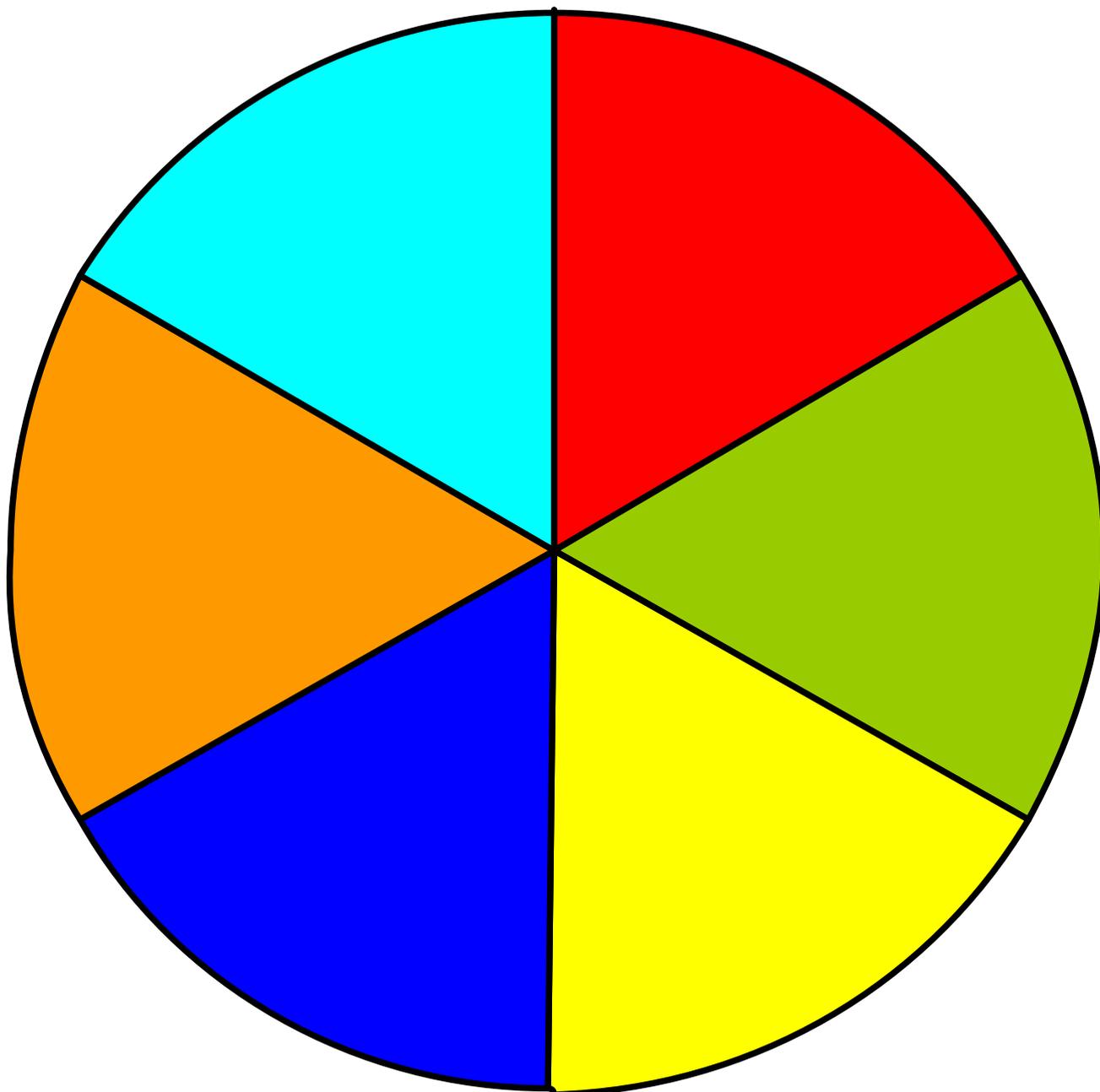
ditemi qual è con un numero maggiore di 47000: _____

La mia assistente esaudirà i vostri desideri.

ALLEGATO 5

RUOTA DI CARTA A 6 SPICCHI

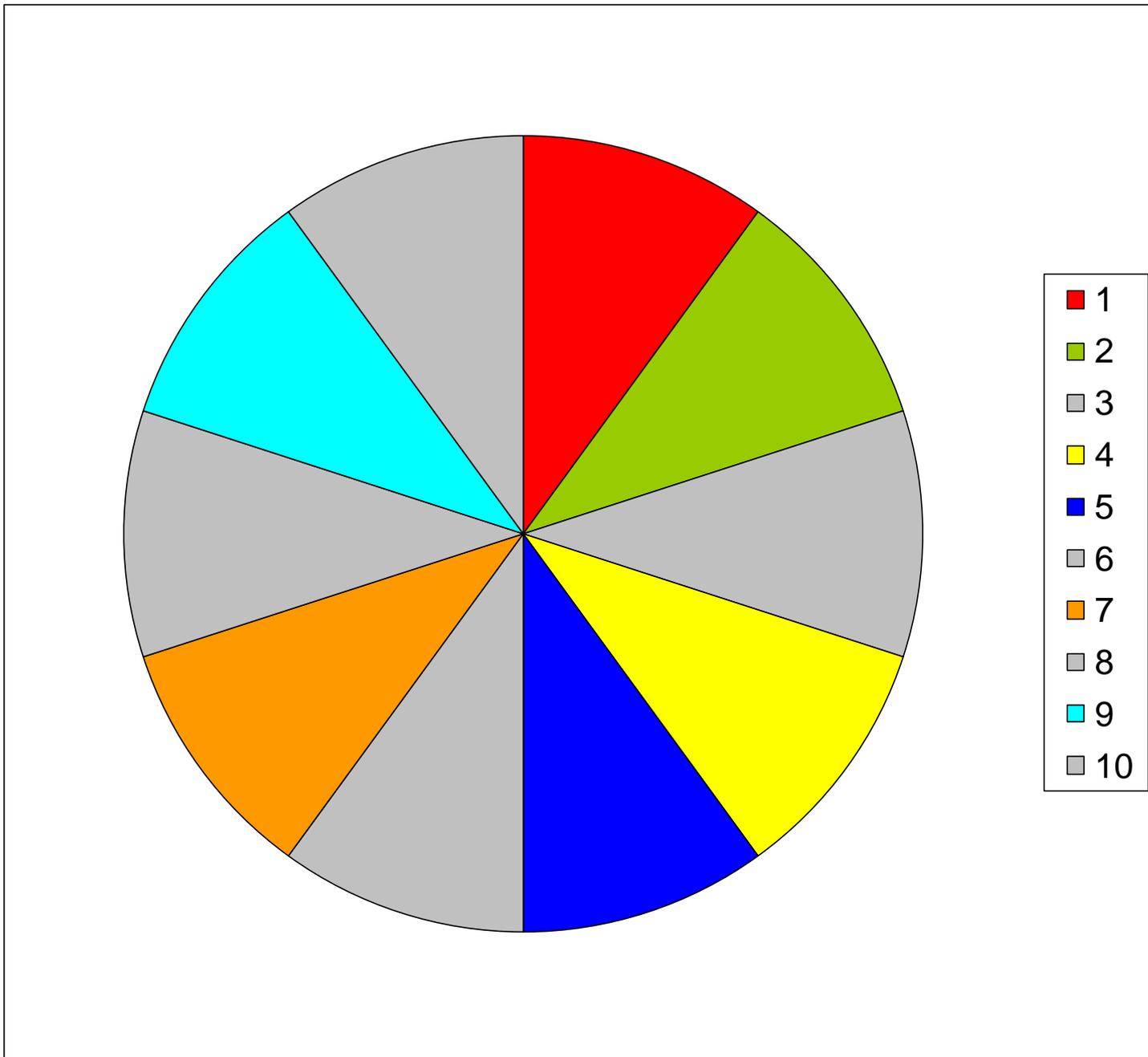
Stampare la seguente ruota a colori, ritagliarla, forarla al centro e assicurarla ad un cartoncino bianco con un fermacampioni. La ruota deve essere libera di ruotare attorno al fermacampioni; sul cartoncino bianco dovrà essere indicato con una freccia il punto di partenza.



ALLEGATO 6

RUOTA DI CARTA A 10 SPICCHI

Stampare la seguente ruota a colori, ritagliarla, forarla al centro e assicurarla ad un cartoncino bianco con un fermacampioni. La ruota deve essere libera di ruotare attorno al fermacampioni; sul cartoncino bianco dovrà essere indicato con una freccia il punto di partenza.



VERIFICA DA SOMMINISTRARE PRIMA DEL LABORATORIO

Alunno: _____

IL FREGIO

In una scuola di Milano, gli studenti hanno preparato, per adornare il corridoio centrale dell'istituto, un fregio che parte come quello qui sotto e prosegue poi sempre nella stessa maniera.



Ogni disegno ha vicino (sulla destra) un piccolo numero, in questo modo:



Il corridoio è molto lungo e alla fine si contano 8724 simboli.

1 Ogni quanti simboli si ripete la sequenza? _____

2 In corrispondenza del numero 26 c'è una clessidra, un fiocco di neve o un sole? _____

3 In corrispondenza del numero 1524 c'è una clessidra, un fiocco di neve o un sole? _____

4 Spiega come hai fatto a rispondere alle domande 2 e 3: _____

5 Quante clessidre, quanti fiocchi di neve e quanti soli sono disegnati in totale nel fregio che decora il corridoio? _____

6 Qual è il numero che corrisponde alla 15-esima clessidra? _____

7 Qual è il numero che corrisponde al 712-esimo sole? _____

Per i corridoi laterali, gli studenti hanno scelto un fregio simile al precedente;
eccolo riprodotto qui sotto



1 bis Ogni quanti simboli si ripete la sequenza? _____

2 bis In corrispondenza del numero 23 c'è una clessidra, un fiocco di neve o un sole?

3 bis In corrispondenza del numero 1234 c'è una clessidra, un fiocco di neve o un sole?

4 bis Spiega come hai fatto a rispondere alle domande 2bis e 3bis:

5 bis Se in totale i disegni di questa successione sono 7654,

quante sono le clessidre? _____

quanti i fiocchi di neve? _____

quanti i soli? _____

6 bis Qual è il numero che corrisponde alla 15-esima clessidra? _____

7 bis Qual è il numero che corrisponde al 713-esimo sole? _____

VERIFICA DA SOMMINISTRARE DOPO IL LABORATORIO

Alunno: _____

INCISIONI ANIMALESCHE

Emma e Giulio sono in vacanza in Egitto con i genitori.

Sono andati a visitare la mitica Biblioteca di Alessandria!" Emma era emozionatissima: intorno a lei enormi quantità di papiri raccoglievano tutto il sapere frutto di due millenni di storia.

Su un lungo e antichissimo papiro osservarono delle successioni di simboli, raffiguranti gatti, colombe e cani; i disegni, oltre ad essere ancora magnificamente colorati, si ripetevano in modo regolare. Una successione - riprodotta qui in bianco e nero - è questa:



1 Ogni quanti simboli si ripete la sequenza? _____

2 Che animale è il 27-esimo disegno? _____

3 Che animale è il 5423-esimo disegno? _____

4 Utilizzando la scrittura della divisione euclidea, spiega come hai risposto alle domande 2 e 3:

27 = quindi _____

5423 = quindi _____

5 Se in totale i disegni della successione sono 8508, quanti sono i gatti? E quante sono le colombe? Quanti i cani? _____

6 In che posizione è il 15-esimo cane? _____

7 In che posizione è il 358-esimo gatto? _____

ALLEGATO 9**TABELLA DI CONFRONTO TRA LE VERIFICHE INIZIALE E FINALE - PER IL DOCENTE****Insegnante:** _____**Classe:** _____

Domanda	VERIFICA INIZIALE (MODULO 10)	VERIFICA INIZIALE (MODULO 8)	VERIFICA FINALE (MODULO 10)	VERIFICA FINALE (MODULO 7)
1. osservare la successione				
2. continuare la successione				
3. usare il resto				
4. verbalizzare la procedura				
5. usare quoziente e resto (numeri grandi)				
6. quoziente, resto (numeri piccoli)				
7. quoziente, resto (numeri grandi)				

ALLEGATO 10**GRIGLIA DI OSSERVAZIONE PER L'INSEGNANTE**

Sessione I:

Difficoltà	Come affrontarla	Gruppo1	Gruppo2	Gruppo3	Gruppo4	Gruppo5	Gruppo6
Gli alunni non hanno capito come girare la ruota e contare gli spicchi	Discussione nel gruppo						
Gli alunni non trovano la successione dei numeri che permettono di vincere un certo premio	Discussione nel gruppo						
Gli alunni trovano i numeri che permettono di vincere un premio ma non li associano ai resti della divisione per 6	Discussione nel gruppo						
Gli alunni non riescono a risolvere il quesito con i numeri grandi	Viene lasciato in sospenso: verranno forniti gli strumenti in una fase successiva.						

	Gruppo1	Gruppo2	Gruppo3	Gruppo4	Gruppo5	Gruppo6
Il gruppo rispetta i tempi previsti						
Il gruppo utilizza il tempo in modo proficuo						
Il gruppo lavora in modo autonomo						
Tutti i membri del gruppo partecipano attivamente						
Argomenti di discussione						

	Gruppo1	Gruppo2	Gruppo3	Gruppo4	Gruppo5	Gruppo6
Il gruppo rispetta i tempi previsti						
Il gruppo utilizza il tempo in modo proficuo						
Il gruppo lavora in modo autonomo						
Tutti i membri del gruppo partecipano attivamente						
Argomenti di discussione						

Sessione III:

Difficoltà	Come affrontarla	Gruppo1	Gruppo2	Gruppo3	Gruppo4	Gruppo5	Gruppo6
Il gruppo ha sbagliato a contare o a distribuire le carte.	Il numero di carte nel mazzo deve essere sempre lo stesso per ciascun gruppo. Nel caso in cui i numeri non coincidano, il gruppo ridistribuisce le carte e ripete il conteggio						
Il ragionamento per trovare il numero di carte è sbagliato.	Il numero di carte nel mazzo deve essere sempre lo stesso; discussione nel gruppo. Eventualmente si ripete la distribuzione delle carte						
Gli alunni non riescono a tradurre in un'espressione il ragionamento per trovare il numero di carte del mazzo.	Discussione nel gruppo; eventualmente a classe intera						
Gli alunni hanno difficoltà a scrivere una divisione senza usare il segno di divisione	Discussione nel gruppo						
Gli alunni hanno difficoltà a completare le scritture della divisione	Discussione nel gruppo o tra gruppi						
Gli alunni hanno difficoltà a capire che il resto non può essere più grande del divisore	Discussione nel gruppo o tra gruppi						
Gli alunni hanno difficoltà a capire come usare la calcolatrice	L'insegnante propone esempi con numeri che siano per loro molto "familiari". Discussione nel gruppo o tra gruppi.						

	Gruppo1	Gruppo2	Gruppo3	Gruppo4	Gruppo5	Gruppo6
Il gruppo rispetta i tempi previsti						
Il gruppo utilizza il tempo in modo proficuo						
Il gruppo lavora in modo autonomo						
Tutti i membri del gruppo partecipano attivamente						
Argomenti di discussione						

	Gruppo1	Gruppo2	Gruppo3	Gruppo4	Gruppo5	Gruppo6	
Il gruppo rispetta i tempi previsti							
Il gruppo utilizza il tempo in modo proficuo							
Il gruppo lavora in modo autonomo							
Tutti i membri del gruppo partecipano attivamente							

Argomenti di discussione						
--------------------------	--	--	--	--	--	--

SCHEDA DI AUTOVALUTAZIONE PER GLI ALUNNI
RIFLESSIONI SUL PERCORSO DI LAVORO

Come abbiamo lavorato?

Segna con una x la frase che più si avvicina al tuo modo di lavorare in gruppo:

1 Disponibilità alla discussione:

- Ho considerato solo il mio punto di vista
- Ho considerato anche il punto di vista dei miei compagni
- Ho apprezzato altri punti di vista, perché mi aiutavano a chiarirmi le idee

2 Partecipazione attiva alle discussioni:

- Ho preferito non dare il mio parere
- Talvolta ho dato il mio parere
- Ho dato sempre il mio parere

3 Responsabilità rispetto al lavoro

- Ho preferito che gli altri facessero la maggior parte del lavoro
- Ho dovuto talvolta essere sollecitato per partecipare al lavoro
- Ho eseguito sempre il lavoro senza bisogno di sollecitazioni

4 Autonomia di lavoro

- Ho avuto bisogno del supporto dell'insegnante
- Qualche volta ho avuto bisogno del supporto dell'insegnante
- Non ho mai avuto bisogno del supporto dell'insegnante

Cos'abbiamo imparato?

Rispondi alle domande:

5 Quando vi abbiamo proposto la prima volta il quesito della ruota dei desideri lo avete trovato difficile? Se sì, in quali domande?

6 La seconda volta siete riusciti a rispondere anche le domande difficili?

7 La macchina di Euclide vi ha aiutato? Perché?

8 Vi è capitato di fare degli errori? Vi è servito?

9 Discutere vi ha aiutato? Se sì, puoi raccontare qualche situazione?

RELAZIONE FINALE DEL LABORATORIO

LA MACCHINA PER DIVIDERE

DOCENTI e CLASSI COINVOLTE:

Tre classi I della scuola secondaria di I grado: 1A, 1B, 1F

PRIMA SESSIONE: la ruota dei desideri

1 B: alcuni gruppi hanno avuto difficoltà a iniziare autonomamente l'attività, a causa di una lettura superficiale delle consegne. Una volta chiarito questo, con il supporto dell'insegnante, i gruppi hanno proseguito autonomamente e sono riusciti a rispondere anche all'ultimo quesito con il numero grande. Probabilmente il fatto di aver già trattato in modo approfondito il tema della divisibilità li ha aiutati, in quanto il numero era facilmente riconoscibile come $12660 + 2$. Per questo motivo, il momento di condivisione finale non è stato necessario.

Per quanto riguarda la collaborazione, è da segnalare che, in un gruppo, gli alunni più bravi hanno escluso i più deboli.

1 A e 1 F: gli alunni hanno iniziato l'attività in modo autonomo, ma hanno mal interpretato le consegne, per esempio anziché girare la ruota in senso orario e contare quindi gli spicchi in senso antiorario, contavano in senso orario, oppure consideravano lo spicchio rosso come il numero 0 anziché il numero 1. Rileggendo la consegna con maggior attenzione e con il supporto dell'insegnante, hanno proseguito l'attività, ma talvolta sono ricaduti negli stessi errori. Il senso di rotazione della ruota è indifferente ai fini dello svolgimento dell'attività, ma è necessario che tutti i gruppi agiscano allo stesso modo e in maniera coerente, per poter condividere e discutere i risultati ottenuti.

Al termine, un momento di condivisione a classe intera ha permesso di riflettere su quanto emerso dalle risposte all'ultimo quesito, verificare che non tutti i gruppi erano riusciti a dare una risposta e lasciarlo in sospeso per riprenderlo successivamente.

Per quanto riguarda la collaborazione, alcuni gruppi non hanno lavorato in modo proficuo, in quanto alcuni elementi si distraevano, influenzando negativamente il lavoro.

SECONDA SESSIONE: la macchina della divisione

La consegna è stata chiara per tutti.

In 1 B, gli alunni hanno avuto difficoltà a capire come funzionava la macchina, poiché lavoravano con la divisione nell'insieme dei numeri razionali; dopo molti tentativi e qualche intervento dell'insegnante, sono riusciti ad arrivare alla soluzione.

In 1 F, gli alunni sono riusciti a lavorare in modo pressoché autonomo per tutta l'attività. La parte più ostica è risultata quella relativa ai casi particolari della divisione, che evidentemente i ragazzi non hanno ben interiorizzato.

Il confronto finale è stato utilizzato, quindi, per chiarire alcuni aspetti legati a questo.

In 1 A, gli alunni inizialmente non ponevano attenzione all'ordine delle coppie di numeri in entrata e in uscita e questo ha generato confusione. Dopo che l'insegnante ha suggerito loro di riesaminare con attenzione gli esempi presentati nella scheda, l'attività è proseguita senza problemi. Anche in questa classe, gli alunni hanno avuto difficoltà nei quesiti riguardanti i casi particolari della divisione, per i quali si è resa necessaria la condivisione a classe intera.

In tutte le classi, i gruppi hanno collaborato e utilizzato il tempo in modo proficuo e ciascuno è riuscito ad portare il proprio contributo.

TERZA SESSIONE: il gioco delle carte

In tutte e tre le classi, gli alunni hanno avuto difficoltà a completare la scheda dove si chiedeva loro di scrivere la formula che portava al numero di carte del mazzo. Inoltre i gruppi non sono riusciti a lavorare in modo autonomo, poiché hanno faticato a trovare il collegamento tra il gioco delle carte e la scrittura della divisione $D = d \cdot q + r$, che è risultata di difficile comprensione.

L'insegnante ha dovuto accompagnare i gruppi in questo passaggio. Inoltre, quasi tutti i gruppi hanno interpretato le scritture della divisione euclidea come un'uguaglianza generica, per cui hanno accettato anche scritture del tipo $25 = 4 \cdot 5 + 5$.

Al termine dell'attività, il confronto su quanto emerso si è, quindi, rivelato necessario e prezioso, sia per istituzionalizzare la scrittura della divisione "scoperta" durante l'attività, sia per riflettere insieme sull'ultimo quesito, relativo alla macchina inceppata per colpa di un resto troppo grande. In 1 B sono stati proposti degli esercizi di consolidamento di questi concetti.

In 1 F alcuni gruppi non hanno lavorato in modo proficuo, in quanto alcuni alunni hanno utilizzato le carte in modo non pertinente all'attività. In 1 A e 1 B, gli alunni hanno collaborato.

QUARTA SESSIONE: la ruota dei desideri – seconda parte

In tutte e tre le classi, gli alunni hanno compreso le consegne, ma hanno avuto difficoltà nel collegare ciò che avevano imparato sulla divisione alla ruota dei desideri, e, quindi, ad utilizzare i resti della divisione per fare previsioni sul premio individuato sulla ruota. L'insegnante ha dovuto accompagnare tutti i gruppi in questo passaggio.

Anche nell'uso della calcolatrice, si è verificato quanto previsto: gli alunni confondono la parte decimale con il resto della divisione. Solo l'intervento dell'insegnante, che ha proposto esempi familiari, ha permesso di superare questo ostacolo e di convincere anche gli alunni più scettici.

Un ulteriore scoglio per tutti è stata la verbalizzazione della procedura: gli alunni hanno grosse difficoltà a mettere per iscritto il loro ragionamento. In 1 A, si è resa necessaria una condivisione in fase di verbalizzazione; in 1 F, tutti i gruppi sono riusciti nella verbalizzazione, ma solo dopo una riflessione collettiva.

In questa sessione, poiché le difficoltà e il livello di astrazione erano maggiori, in alcuni gruppi, quelli più omogenei, la collaborazione è stata ancora più proficua, in altri invece, il divario tra le capacità degli alunni si è evidenziato e ha ostacolato la collaborazione.

VALUTAZIONE DEI PUNTI DI FORZA E PUNTI DI DEBOLEZZA DEL PERCORSO

Il percorso proposto era adeguato al livello della classe? Fareste delle modifiche per meglio tararlo sulle competenze dei ragazzi?

Il percorso è adeguato al livello della classe come contenuti e attività, sarebbe però più opportuno proporlo all'inizio della classe prima, come ripasso e approfondimento delle operazioni in N.

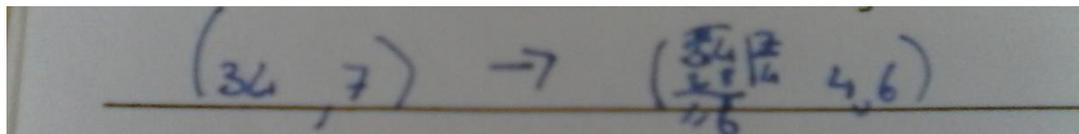
Sarebbero necessarie, inoltre, alcune modifiche per chiarire e guidare meglio i due passaggi chiave, in modo che i ragazzi riescano ad essere più autonomi in queste fasi:

- dal gioco delle carte alla scrittura della divisione: è utile inserire nella scheda ulteriori collegamenti tra il gioco delle carte come distribuzione, cioè divisione, di carte tra giocatori e la macchina della divisione, ponendo attenzione all'ordine e al significato dei numeri in entrata e in uscita. Per esempio, il numero di giocatori non può essere confuso con il numero di carte nel mazzo, quindi nella scrittura della divisione non si può scambiare divisore e quoziente.
- dalla macchina della divisione alla ruota dei desideri: si potrebbero proporre, oltre alle attività del laboratorio, varie situazioni problema che prevedano l'uso del quoziente e/o del resto (calendario, collane, medicine, orologi, conte...)

Gli obiettivi di tipo matematico sono stati raggiunti? Quali in maniera evidente? Quali con difficoltà? Perché, secondo voi?

L'obiettivo principale del laboratorio, "consolidare il concetto di divisione in N, ponendo particolare attenzione al resto e al suo significato", è stato pienamente raggiunto: i ragazzi si sono resi conto che esiste anche il resto e hanno imparato a prenderlo in considerazione e ad utilizzarlo. Inoltre, l'attività ha contribuito a promuovere un uso più consapevole della calcolatrice e quindi a riconoscere le differenze tra i mondi N e Q.

Per quanto riguarda "comprendere ed utilizzare la scrittura della divisione come $D = d \cdot q + r$ ", i ragazzi hanno difficoltà ad utilizzarla e, soprattutto, a riconoscere in essa una divisione. Molti di loro, infatti, considerano valide anche delle scritture in cui il resto è maggiore del divisore, uguaglianze vere ma che non rappresentano una divisione. Questo aspetto, probabilmente, ha bisogno di tempi più lunghi per essere metabolizzato dai ragazzi, in quanto scrivere una divisione senza il simbolo della divisione richiede un passaggio di astrazione che molti di loro faticano a mettere in atto. È da sottolineare che è emersa spontaneamente la seguente scrittura su cui, forse, varrebbe la pena di lavorare:



Gli Avengers, 1 B

La collaborazione all'interno dei gruppi è migliorata dall'inizio alla fine del percorso di laboratorio? Si sono avute ripercussioni anche a livello di gruppo classe?

Man mano che progrediva l'attività, alcuni gruppi sono diventati sempre più affiatati, e ciascun membro riusciva a partecipare portando il proprio contributo; questo è successo in particolare nei gruppi più omogenei per capacità; nei gruppi in cui sono stati inseriti gli alunni più deboli, il divario tra le capacità degli alunni sembrava acuitarsi; questo ha portato ad una progressiva autoesclusione di alcuni alunni, generalmente quelli più deboli, ma in un caso anche quelli trainanti, che hanno rinunciato mentre i compagni hanno continuato a provare.

A livello del gruppo classe, il laboratorio ha favorito un clima di disponibilità al confronto e alla discussione. Nelle riflessioni degli alunni sul percorso compiuto, inoltre, è emersa l'importanza dell'errore che "è servito per imparare meglio".

Quali conclusioni avete tratto da quelle attività che avete condotto al fine di valutare l'efficacia del laboratorio?

Il confronto dei risultati ottenuti nella verifica iniziale e nella verifica finale ha permesso di concludere che i ragazzi hanno compreso l'importanza del resto, considerandolo a tutti gli effetti parte del risultato della divisione. Solo una parte di essi, però, ha veramente interiorizzato il suo significato e ha imparato ad usarlo per risolvere varie situazioni, da quelle note a quelle meno note. Probabilmente il laboratorio ha bisogno di essere affiancato da momenti di consolidamento dei concetti appresi mediante esercizi.

Dalla verifica finale, inoltre, si conferma la difficoltà degli alunni nella verbalizzazione delle procedure.

Il laboratorio ha favorito un atteggiamento di ricerca da parte dei ragazzi? Per quali aspetti? Quali criticità sono state messe in evidenza?

Il laboratorio ha favorito un atteggiamento di ricerca attiva da parte dei ragazzi. Ciò richiede un notevole investimento di energie e quindi è opportuno prevedere delle sessioni brevi e alternate ad attività di consolidamento.

Un'attività di ricerca presenta per sua natura delle difficoltà e delle sfide da affrontare. Anche dove si è reso necessario l'intervento dell'insegnante, si è posta molta attenzione nel portare i ragazzi alla scoperta senza "svelare le carte". Forse, come già sottolineato, alcuni passaggi dovrebbero essere più guidati, per aumentare l'autonomia di lavoro dei gruppi. Ma fino a che punto? L'equilibrio tra autonomia dei ragazzi e margine di scoperta rimane difficile da calibrare.